

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (35 درجة) (أ) أدرس تقارب أو تباعد الجداء اللانهائي التالي واحسب قيمته في حال التقارب :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2^{n-1}}) , |x| < 1$$

(ب) أدرس التقارب المطلق أو المشروط للمتسلسلة الآتية :  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{n \ln n}$ السؤال الثاني (33 درجة) (أ) لتكن متتالية الدوال  $(f_n(x))$  المعرفة على المجال  $X = [0,1]$  كما يلي :

$$f_n(x) = x^n(1-x)^n , n \in \mathbb{N}$$

المطلوب : أوجد  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ، ثم بين فيما إذا كان هذا التقارب منتظم لهذه المتتالية أم لاعلى  $X = [0,1]$  مع الإثبات ، ثم أوجد التكامل :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n(1-x)^n dx$ 

(ب) أدرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n \sqrt[n]{n+1}}\right) , \forall x \in [0,2]$$

السؤال الثالث (32 درجة) (أ) لتكن الدالة  $f(x) = \sin x$  معرفة على المجال  $(0, \pi)$ 

المطلوب : أوجد منشور فورييه لهذه الدالة الذي يحوي جيوب التمام فقط على هذه الفترة .

(ب) إذا كان  $p > 0 , q > 1$  فأثبت أن :  $\beta(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} \beta(p, q-1)$ 

انتهت الأسئلة

استاذ المقرر

حمص في 2 / 9 / 2014 مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

د. منير مخلوف

22

وزارة التعليم العالي  
جامعة البعث  
كلية العلوم - قسم الرياضيات  
الامتحان النهائي  
لمقرر تحليل (3) السنة الثانية رياضيات  
الفصل الثاني لعام 2013-2014  
الاسم :  
الدرجة 100  
المدة ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (35 درجة) (أ) أدرس تقارب أو تباعد الجداء اللانهائي التالي واحسب قيمته في حال التقارب :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

(ب) أدرس التقارب المطلق أو المشروط للسلسلة الآتية :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n^2 \pi}{n \ln n}$$

السؤال الثاني (35 درجة) (أ) لتكن متتالية الدوال  $(f_n(x))$  المعرفة على  $R$  كما يلي :

$$f_n(x) = \frac{2n^2 x}{1+n^5 x^2}, \quad n \in N$$

المطلوب : أوجد  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ، ثم بين فيما إذا كان هذا التقارب منتظم لهذه المتتالية أم لا على  $R$

مع الإثبات

(ب) لتكن  $F(x)$  دالة معرفة على المجال  $[0, \pi]$  كما يلي :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$$\int_0^{\pi} F(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^4}$$

السؤال الثالث (30 درجة) (أ) أوجد منشور فورييه للدالة  $f(x) = |\cos x|$  على المجال  $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$  .

(ب) باستخدام التكاملات الأولرية أثبت أن :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

استاذ المقرر

انتهت الأسئلة

د. منير مخلوف

حمص في 2014/6/17 مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

أجب عن الأسئلة التالية :

سؤال الأول (35 درجة) (أ) أدرس تقارب وتساعد الجداء التانجنتي الثاني واحسب قيمته في حال التقارب :

$$\prod_{n=2}^{\infty} 2^{\frac{(n-1)^2}{n!}}$$

(ب) أوجد مجال تقارب متسلسلة القوى التالية:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} (1-x)^n$

(ج) أدرس التقارب المطلق أو المشروط للمتسلسلة الآتية:  $\sum_{n=1}^{\infty} [\sin(2n-1) \frac{\pi}{2}]^{\frac{(\ln n)^2}{n}}$

سؤال الثاني (30 درجة) (أ) لتكن متتالية الدوال  $(f_n(x))$  المعرفة على المجال  $X = [2, \infty[$  كما يلي :

$$f_n(x) = nx^2 e^{-nx}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [2, \infty[$$

المطلوب : أوجد  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ، ثم بين فيما إذا كان هذا التقارب منتظم لهذه المتتالية أم لا على

$X$  مع الإثبات .

(ب) لتكن متسلسلة الدوال الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x^2)^n, \quad \forall x \in X = ]0,1[$$

المطلوب : أدرس التقارب المنتظم لهذه المتسلسلة على  $X = ]0,1[$  .

سؤال الثالث (35 درجة) (أ) أوجد مشور فورييه للدالة  $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$  على المجال  $(0, \pi)$

والذي يحوي جنوب التمام فقط .

(ب) أثبت صحة الصيغة الآتية :

$$2^{2p-1} \Gamma(p) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2p), \quad \forall p > 0$$

استاذ المقرر

انتهت الأسئلة

د. منير مخلوف

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

حمص في 2014/1/14







جامعة بغداد

قسم تصحيح الامتحان النهائي

الدرجة: ٢٥٥

كلية العلوم - قسم الرياضيات  
مقرر تحليل رياضي / سوية ثانية رياضيات  
المصطلح للعام ٢٠١٣ - ٢٠١٤

جواب السؤال الأول: (أ) حسب المبرهنة التي تنص « الشرط اللازم والكافي لمقارب المتتاليات

المتنازعة هو أن مقارب المتتالية العددية  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  هو أن مقارب المتتالية العددية  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$

35

عند المقارنة

وعند مقابلة الشرط، نرى من أن  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$  هو مجموع المتتالية  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = e^k$  سيكون

الآن لدينا:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 2^{\frac{(n-1)^2}{n!}} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n!} \cdot \ln 2$$

وهذه المتتالية هي متتالية عددية ذات حدود موجبة، كما أن

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n!} \cdot \ln 2 = \ln 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{n!} = \ln 2 \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \right]$$

ولكن

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e + e - 1 = 2e - 1$$

أيضاً:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e - 1 \quad \text{و} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 2$$

نلاحظ

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n!} \ln 2 = \ln 2 [2e - 1 - 2(e - 1) + e - 2] = \ln 2 (e - 2) = (e - 1) \ln 2$$

نلاحظ أن الحد الأقصى المقارب هو متتالية موجبة.

$$\prod_{n=2}^{\infty} 2^{\frac{(n-1)^2}{n!}} = 2^{e-1}$$

(ب) نلاحظ أن المتتالية المعطاة تكتب بالصورة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} (-1)^n (x-1)^n$$

وهذه المتتالية مقاربة عند  $x=1$  أي في

نقطة

الآن إذاً  $x \neq 1$ ، سيكون

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[2(n+1)]!!}{[2(n+1)+1]!!} \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n+3} = 1$$

نلاحظ

$$r = \frac{1}{L} = 1$$

وبذلك تكون المتسلسلة المعطاة متقاربة مطلقاً لـ  $x=1$

$$|x-1| < 1$$

$$0 < x < 2 \quad \text{أي فترة التقارب هي } [0, 2]$$



2

(2)

عند  $x=0$  ،

(1) عند  $x=0$  ، سلسلة المعروفة متسلسلة أي المتسلسلة متسلسلة . يمكن استخدام اختبار رابنيج أن

3

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \cdot \frac{2n+3-2n-2}{2n+2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1$$

إذاً  $R < 1$  ، سلسلة متسلسلة بالمثل

(2) عند  $x=2$  ، المتسلسلة :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!!}{(2n+1)!!}$  متسلسلة بوزن جدها العام

3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \neq 0$$

بذلك المتسلسلة لا تتقارب

(3) إن المتسلسلة العددية المعطاة تتقارب بالصورة :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\ln n)^2$

$$\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{n-1}$$

لنفرض  $a_n = \left( \frac{\ln n}{n} \right)^2$  ، نتيجته أن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \ln n)}{n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

ومن جهة ثانية نأخذ الدالة :

استفاد هذه الدالة بالنسبة للمتغير  $x$  حصل على :

$$f'(x) = \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}$$

$$\frac{\ln x}{x^2} > 0 \text{ لكل } x > 2 \text{ كذلك الآخر : } 2 - \ln x < 0 \text{ لكل } x \geq 9$$

3

إذاً المتسلسلة  $(a_n)$  متناقصة من أجل  $x \geq 9$

بحسب معيار أن المتسلسلة المعطاة عبارة عن متسلسلة متناوبة (متناوبة) ويمكن استخدام اختبار لايبنيز بين متناوبة وهي متناوبة شريطة أن تكون متناوبة ومتسلسلة متناوبة لأننا نستخدم اختبار

الكامل قد أخذ :

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ (\ln x)^3 \right]_1^b = \infty$$

3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n}$$

وهذا يعني أن المتسلسلة العددية





جواب السؤال الثاني (أ) نفهم أن  $t \rightarrow +\infty$  عدا  $t \rightarrow 0$  إذا كانت  $t > 0$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  وراثي فثابت. [30]

(15+15) أي أن:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$  و  $\forall x \in [0, +\infty[$  درج

ولصورة خاصة يكون:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  و  $x \in [2, +\infty[$  و  $x \in [2, +\infty[$

نأخذ الدوال  $f_n(x)$  قابلة للاشتقاق كما أن:  $f'_n(x) = nx e^{-nx} (2 - nx) < 0$  و  $\forall x > \frac{2}{n}$  و  $\forall n \in \mathbb{N}$

نأخذ الدوال  $f_n(x)$  متناصصة على الفترة  $[\frac{2}{n}, +\infty[$  ، ولذا يكون:

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in X} |nx^2 e^{-nx} - 0| = \sup_{x \in X} |nx^2 e^{-nx}| \leq f_n\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n} e^{-2}\right) = 0 \Rightarrow \text{أد:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |nx^2 e^{-nx}| = 0$$

وهنا نضع نصب اختباراً أساساً أن متالية الدوال المطلقة متقاربة ما يتكامل من  
 الدالة الصفرية على  $X = [2, +\infty[$

(ب) إن متالية الدوال:  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x^2)$  متقاربة بشكل غير متقطع على الفترة  $[0, 1[$  و  $x \in [0, 1[$

وذلك لأنه بفرض  $\epsilon > 0$  عدد مسمى ما عطي  $\epsilon$  ولنفرض كذلك أنه يوجد عدد طبيعي

$N(\epsilon)$  بحيث أنه من أجل كل  $n > N(\epsilon)$  و  $x \in [0, 1[$  و  $x \in [0, 1[$  يكون لدينا:

$$\left| \sum_{k=n}^m f_k(x) \right| = |x^n(1-x^2) + x^{n+1}(1-x^2) + x^{n+2}(1-x^2) + \dots + x^m(1-x^2)| =$$

$$= |x^n + x^{n+1} - x^{m+1} - x^{m+2}| = |x|^n \cdot |1+x| \cdot |1-x^{m+1}| \leq$$

$$\leq x^n (1+x) < \epsilon$$

والتي يتبع عن ذلك أن يكون

$$n > \frac{\ln \epsilon - \ln(1+x)}{\ln x} = N(\epsilon, x)$$

وهذا يعني أن  $N(x)$  الزاوية من جوارها هي في الحقيقة غير موجودة لأن الطرفين اللذين من  
 المتراجحة الدائرية لا يمكن تقديره بمقدار أصغر من  $\epsilon$  على الدائرة  $X = ]0, 2\pi[$ .  
 ملاحظة: نعلم استخدام النتيجة التالية.

إذا كانت  $(f_n)$  متتالية مقاربة (مقاربة بنظام) على المجموعة  $X$ ، فإن متسلسلة  
 الدوال:  $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n - f_{n-1})$  مقارب (مقارب بنظام) على  $X$  أيضاً.  
 ويمكن ملاحظة أن متسلسلة الدوال تكتب بالصورة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+2})$$

ولذلك كانت متتالية الدوال  $(x^n)$  مقارب من الدالة  
 الصفرية بشكل غير متقارب على  $]0, 2\pi[$  (أثبت ذلك)، وهذا يعني أن متسلسلة الدوال  
 المقترحة تكون كذلك. لأن:

$$(x^n - x^{n+2}) = (x^n - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}) = [(x^n - x^{n+1}) + (x^{n+1} - x^{n+2})]$$



(5)

مجموع السلسلة (أ) متاثر التفرعية على الفترة  $]-x, x[$  وذلك باعتبار  
 [35] مفهوم أن الدالة المفروضة  $f$  مقصورة دالة زوجية  $y(x)$  ودورية  
 دورها  $2x$  حيث أن هذه الدالة تحقق شروط ديرجليه (مستمرة على الفترة  
 $]-x, x[$  و مطردة على السلسلة  $]-x, 0[$  و  $0, x[$  ) فهو صحيح على  $]-x, x[$   
 ويكون:

$$4 \quad \frac{x-x}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

وذلك:

$$3 \quad a_0 = \frac{2}{x} \int_0^x \left( \frac{x-x}{2} \right) dx = \frac{1}{x} \left( xx - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^x = \frac{1}{x} \left( x^2 - \frac{x^2}{2} \right) = \frac{x}{2}$$

$$4 \quad a_n = \frac{2}{x} \int_0^x \left( \frac{x-x}{2} \right) \cos nx dx = \frac{1}{n^2 x} [1 - (-1)^n]$$

$$3 \quad b_n = 0 \quad ; \quad \forall n=1, 2, 3, \dots$$

لذا فإن السلسلة المطلوبة هي:

$$3 \quad \frac{x-x}{2} = \frac{x}{4} + \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} \quad \forall x \in ]0, x[$$



(ب) أمينا

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

p=q محصل على

وبصورة خاصة إذا واصل

$$\beta(p, p) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{p-1} dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} t^{p-1} (1-t)^{p-1} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{p-1} (1-t)^{p-1} dt$$

 $\forall p > 0$ 

(1)

من الكمال الذي هو القيمة (1) تأخذ التحويل التالي:

$$6 \quad u = 1-t \Rightarrow du = -dt$$

$$\int_0^1 [t(1-t)]^{p-1} dt = - \int_1^0 [(1-u)u]^{p-1} du = \int_0^1 [u(1-u)]^{p-1} du \quad (2)$$

ولما كان تسمي المتحول هي الكمال المحدد لا يؤثر على هذا الكمال عند التحويل استطعنا أن نذكر  
 القيمة (1) بالصورة.

W/

$$\beta(p, p) = 2 \int_0^1 [t(1-t)]^{p-1} dt \quad (6)$$

(3)

الآن نأخذ التحويل التالي :

$$t(1-t) = \frac{z}{4} \Rightarrow dt = \frac{1}{4} \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \quad \text{و} \quad (1-z) = (2t-1)^2$$

6

$$\beta(p, p) = 2 \int_0^1 \left(\frac{z}{4}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{dz}{\sqrt{1-z}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{2p-2}} \int_0^1 z^{p-1} (1-z)^{-\frac{1}{2}} dz \quad (4)$$

وبالتعويض من (3) نجد أن :

ونذكر نعلم أن :

$$\beta(p, p) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(p)}{\Gamma(2p)} \quad (5)$$

(5)

أيضاً لدينا من (4)

$$\beta(p, p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \beta\left(p, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2p-1}} \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)} \quad (6)$$

(6)

5

$$2^{2p-1} \cdot \Gamma(p) \cdot \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(2p)$$

من (5) و (6) نجد أن :

و  $p > 0$

هذه الصيغة تسمى عادةً صيغة ليبنر

مدرس المقرر :

د. منير قلوب

خط



د. فؤاد النعمان

(مختار)

مستشار

وزارة التعليم العالي

جامعة البعث

كلية العلوم - قسم الرياضيات

سام ناصح

مدير / صيانة

رياضيات

الامتحان النهائي

الاسم

الدرجة 100

الجهة مباحث

المقرر تحليل (3) السنة الثانية رياضيات

الفصل الثاني لعام 2012-2013

اجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (36 درجة) (أ) ادرس تقارب أو تباعد الجداء التالفي التالي واحسب قيمته في حال التقارب :

$$\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{2}{n(n+1)})$$

(ب) اوجد مجال تقارب متسلسلة القوى التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{x^n} x^{2n}$$

(ج) ادرس التقارب المطلق أو المشروط لمتسلسلة التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{n^2}$$

السؤال الثاني (36 درجة) (أ) لتكن متتالية النوال  $(f_n(x))$  المعرفة على المجال  $X = [0,1]$  كما يلي :

$$f_n(x) = \frac{2n^2 x}{1+n^2 x^2}$$

المطلوب : اوجد  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ثم بين فيما إذا كان هذا التقارب منتظم لهذه المتتالية أم لا على  $X = [0,1]$  مع الإثبات .

(ب) ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلة النوال التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{x}{n^2/n+1}), \forall x \in [0,3]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 (1 + \frac{1}{1+x})^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$$

السؤال الثالث (28 درجة) (أ) اوجد منثور فورييه لـ  $f(x) = |\cos x|$  على المجال  $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$

(ب) أثبت أن :

$$\beta(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} \beta(p, q-1)$$

من أجل  $q > 1, p > 0$

استاذ المقرر

د. منير مخلوف

انتهت الأسئلة

تمنياتي بالتوفيق والتحاج

حتمس في 2013/6/23

د. فؤاد النعمان (مختار)

مختار

09712705490 - 09712705490





(١) أوجد مجال تقارب متسلسلة القوى التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2^n} x^{2n}$$

الحل: لنجد لا متقاربة ولنضيق اختصاراً والى حد اللانهاية

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+2}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1) 4 x^2 \cdot 2^n}{2^{n+1}} \right| = 4x^2$$

مركز العلوم والدراسات الجامعية  
جامعة الملك سعود - الرياض  
٠٩٦٦٢٢٢٢٢٢ - ٠٩٦٦٢٢٢٢٢٢

حتى نحصل على تقارب يجب أن يكون  $4x^2 < 1$  وسنحصل على  $x^2 < \frac{1}{4}$  ومنه  $|x| < \frac{1}{2}$  وجال التقارب  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$  وبما أن

$$x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

لنجد مجال التقارب عند أطرافه:

$$1) x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2^n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2^n \cdot 2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

وهي سلسلة متناوبة في  $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$  متنازعة متوافقة ومقتضية

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

بحسب قاعدة لايبنتز السلسلة متقاربة

$$2) x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2^n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2^n \cdot 2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

وهي سلسلة متقاربة وبما أن مجال التقارب المركزي هو  $x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

(٢) ادرس التقارب المطلق أو الشرطي للسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{n^2}$$

$$\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) =$$

$$= -(\cos n\pi) = (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}$$



u

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

إن السلسلة العكاسية كانت  $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$  متسلسلة متناوبة وأيضاً

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

نستنتج من ذلك أن السلسلة العكاسية متقاربة تماماً

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

سلسلة رياضية  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  مطلقاً.  $\Rightarrow$  هي متقاربة وبالتالي السلسلة العكاسية متقاربة

السؤال الثاني: (ج) لنكن متسلسلة الدوال  $\{f_n(x)\}$  المعرفة على المجال  $X = [0, 1]$  كما يلي

$$f_n(x) = \frac{2n^2x}{1+n^5x^2}$$

دائماً: أوجد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  بيّن في إجابات هذا التقارب منقلاً (إنه

مركز المعلومات للعلوم والتقنيات

مجاناً - محاضرات - دروس

٠٩٦٦٢٧٨٧٥٧٢ - ٠٩٦٦٢٧٨٧٥٧٢

متسلسلة أم لا على  $X = [0, 1]$  عموماً لا

الكل: لنذكر التقارب النقطي لمتسلسلة الدوال

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{2n^2x}{1+n^5x^2} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = 0$$

متقاربة نقلياً إلى الدالة الصفرية  $f(x) = 0$  أعالج التقارب النقطي فقط بتطبيق اختبار ديرشراس حيث حسب

$$\forall x \in [0, 1] \Rightarrow \left| f_n(x) \right| = \left| \frac{2n^2x}{1+n^5x^2} \right| = \frac{2n^2x}{1+n^5x^2}$$

$$x_n = \frac{2n^2x}{1+n^5x^2} \Rightarrow x_n' = \frac{2n^2(1+n^5x^2) - 2n^2x \cdot 2n^5x}{(1+n^5x^2)^2}$$



$$\Rightarrow \alpha_n' = \frac{2n^2 + 2n^7 x^2 - 4n^7 x^2}{(1+n^5 x^2)^2} = \frac{2n^2 - 2n^7 x^2}{(1+n^5 x^2)^2} = 2n^2 \frac{1 - n^5 x^2}{(1+n^5 x^2)^2}$$

يُكَلِّف  $\alpha_n' = 0$  عند  $x = \pm \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$  ومنه  $x^2 = \frac{1}{n^5}$

	$-\infty$	$-\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$	$0$	$\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$	$+\infty$	
$\alpha_n'$	—	0	+	+	0	—
$\alpha_n$						

مركز العلوم للخدمات الجامعية  
مخاتبات - ص.ب. ١١١١ - الرياض  
٩٢١٨٢٩٩٩٩ - ٩٦٦٦٦٦٦٦٦٦

السكون عند  $x = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$  كما  $\alpha_n$  بالتبديل عند  $x = -\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$

$$\sup \alpha_n = \frac{2n^2 \cdot n^{-\frac{5}{2}}}{1+n^5 \cdot \frac{1}{n^5}} = n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \alpha_n = \frac{2n^2 x^2}{1+n^5 x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

والنتيجة هي أن  $\alpha_n$  يتناقص.

(٥) ادرس السلسلة المتكاملة الدوال التالية

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \quad \forall x \in [0, 3]$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

الاجابة

نقوم في البداية بدالة السلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}$  حيث  $x \in [0, 3]$

من أجل ذلك نتحقق من اختبار ديرشلاي، فليس كذلك بل نتحقق من اختبار

$$\left| \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}} \right| \leq \frac{3}{n\sqrt[3]{n+1}}$$

إذا كانت السلسلة العددية  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\sqrt[3]{n+1}}$  متقاربة وذلك لأنه حسب اختبار

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{n\sqrt[3]{n+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^{\frac{1}{3}}}{n\sqrt[3]{n+1}} = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} = 3$$

السلسلة في طبيعة واحدة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$  متقاربة وباتت السلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\sqrt[3]{n+1}}$  متقاربة وحسب اختبار ديرشلاي للسلسلة

تكون السلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}$  متقاربة بالتساوي على المجال  $[0, 3]$  وبالتالي

يكون الجداء  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right)$  هو جداء متقارب بالتساوي نتيجة لذلك على المجال  $[0, 3]$  وبما أن السلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right)$  هي سلسلة اللوغاريتمات

المتقاربة بالجداء  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right)$  وبالتالي لا نفس طبيعة الجداء تماماً من حيث متقاربة بالتساوي على المجال  $[0, 3]$  وهو المطلوب.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

نأخذ متسلسلة الجيبس الجبرية لهذه السلسلة

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n x^2 \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)^{k-1}$$



لدينا نريد  $q = 1 + \frac{1}{1+x^2}$  (17)

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n x^2 q^{k-1} = x^2 \underbrace{\left(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}\right)}_S$$

$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

$$qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n$$

$$S - qS = 1 - q^n \Rightarrow S = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\Rightarrow F_n(x) = x^2 \frac{1 - q^n}{1 - q} = x^2 \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)^n}{1 - 1 - \frac{1}{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow F_n(x) = x^2(1+x^2) \left[ \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)^n - 1 \right]$$

$\forall x \in \mathbb{R}$  فإن  $\frac{1}{1+x^2} > 0$  وذلك  $\forall x \in \mathbb{R}$  ومنه

$$1 + \frac{1}{1+x^2} > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)^n = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

لذلك فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = +\infty$$

والمستلزم من ذلك أن الدالة  $F_n$  تتزايد باستمرار وليست متقاربة نقصاً إذاً ؟  
فلا يمكن أن تكون متقاربة بانتظام.

السؤال الثالث : (4) أوجد متوابع خوارزمية للدالة  $f(x) = |\cos x|$  على  
المجال  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

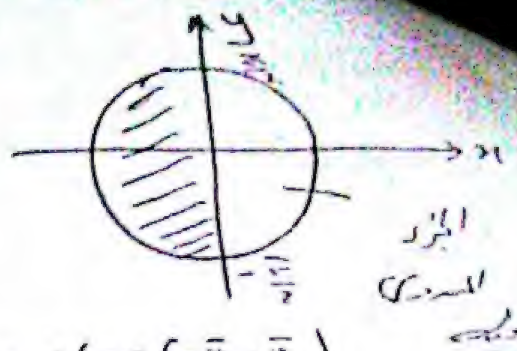
الحل : نأخذ الدالة  $f$  دورية دورها  $2\pi = \pi$  حيث نلاحظ أن

$$f(x) = |\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{و } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ \cos x & \text{و } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



15

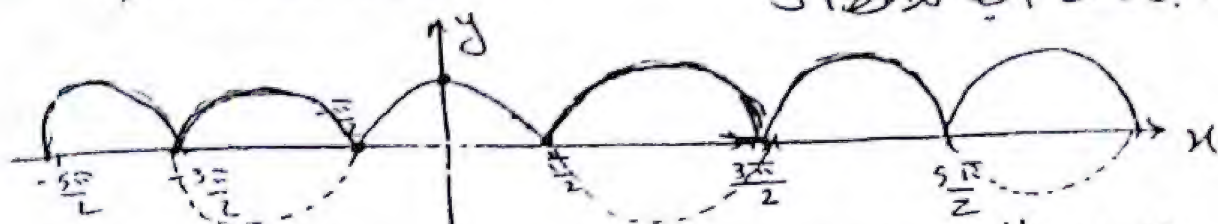
37



$$\cos x > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = |\cos x| = \cos x$$

هذا جدول أيضًا نلاحظ أن



هو المخطط البياني لـ  $f(x) = |\cos x|$  على  $\mathbb{R}$

إن الدالة المثلثية زوجية حسب اختبار باريتيه المعكوف

لذلك لدينا

$$a_0 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} [1 + 1] = \frac{4}{\pi}$$

هذا هو المتوسط الحسابي للدالة على الفترة  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos \frac{n \cdot x}{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2n+1)x + \cos(2n-1)x] dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x) + \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2}{2n+1} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{2n-1} \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos n\pi = (-1)^n$$

$$\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right] = \frac{2(-1)^n}{\pi} \left[ \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right]$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2(-1)^n}{\pi} \left[ \frac{2n-1 - 2n-1}{4n^2-1} \right] = \frac{4(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

$n=1, 2, \dots$

$$b_n = 0 \quad n=1, 2, \dots$$

لأنه الدالة زوجية

ونشر فوريريه للمثلث باس 2

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos 2nx$$

(5) أسيه انت

$$\beta(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} \beta(p, q-1)$$

حيث  $p > 0, q > 1$



اكمل: لدينا حسب تعريف البتا

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

$$\Rightarrow \beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \cdot \frac{p dx}{p} = \frac{1}{p} \int_0^1 (1-x)^{q-1} d(x^p)$$

لنحل الاستبدال بالجزئية ولنفرض

$$u = (1-x)^{q-1}$$

$$du = (q-1)(1-x)^{q-2} (-1) dx$$

$$du = (1-q)(1-x)^{q-2} dx$$

$$dv = d(x^p) \Rightarrow v = x^p$$



$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^{q-1} d(x^p) = (1-x)^{q-1} x^p \Big|_0^1 - \int_0^1 (1-x)^{q-2} x^p dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^{q-1} d(x^p) = \int_0^1 (q-1)(1-x)^{q-2} [x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)] dx$$

$$= \int_0^1 (q-1)(1-x)^{q-2} x^{p-1} dx - \int_0^1 (q-1)(1-x)^{q-1} x^{p-1} dx$$

$$\Rightarrow \beta(p, q) = \frac{1}{p} \int_0^1 (1-x)^{q-1} d(x^p) = \frac{1}{p} \left[ \int_0^1 (q-1)(1-x)^{q-2} x^{p-1} dx - \int_0^1 (q-1)(1-x)^{q-1} x^{p-1} dx \right]$$

$$\beta(p, q) = \frac{1}{p} \left[ (q-1) \beta(p, q-1) - (q-1) \int_0^1 (1-x)^{q-1} x^{p-1} dx \right]$$

$$\beta(p, q) = \frac{1}{p} \left[ (q-1) \beta(p, q-1) - (q-1) \beta(p, q) \right]$$

$$\beta(p, q) = \frac{q-1}{p} \beta(p, q-1) - \frac{q-1}{p} \beta(p, q)$$

$$\left(1 + \frac{q-1}{p}\right) \beta(p, q) = \frac{q-1}{p} \beta(p, q-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p+q-1}{p} \beta(p, q) = \frac{q-1}{p} \beta(p, q-1)$$

$$\Rightarrow \beta(p, q) = \frac{q-1}{p} \cdot \frac{p}{p+q-1} \beta(p, q-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} \beta(p, q-1)}$$

تمت

مراجعة

جامعة البعث  
كلية العلوم  
قسم الرياضيات

الإمتحان النهائي  
لمقرر تحليل (3) السنة الثانية رياضيات  
الفصل الأول لعام 2012-2013 م

الاسم :  
المدة : ساعتان  
الدرجة : 100

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (36 درجة) أجب عن ثلاثة فقط مما يلي :  
(أ) أدرس تقارب أو تباعد المتسلسلة التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right) \cdot (2n+1)$$

(ب) أدرس التقارب المطلق أو المشروط للمتسلسلة :  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^2}{n}$

(ج) أدرس تقارب أو تباعد الجداء اللانهائي التالي ، وأحسب قيمته في حال التقارب :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n^n \sqrt{n}} \right)$$

(د) أوجد مجال تقارب متسلسلة القوى التالية :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

صواب

السؤال الثاني (36 درجة) (أ) لتكن متتالية الدوال  $(f_n(x))$  المعرفة على المجال  $X = [0, 1]$  كما يلي :

$$f_n(x) = x^n(1-x)^n, n \in \mathbb{N}$$

المطلوب : أوجد  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ثم بين فيما إذا كان هذا التقارب منتظم لهذه المتتالية

على المجموعة  $X$  مع الإثبات ، ثم أوجد لتكامل :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n(1-x)^n dx$

(ب) أدرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال التالية :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}, \forall x \in [0, \infty]$$

السؤال الثالث (28 درجة) (أ) أوجد منشور فورييه للدالة  $f(x) = |\sin x|$  على المجال  $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$  .

(ب) باستخدام التكاملات الأولية أحسب قيمة التكامل التالي :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi$$

أستاذ المقرر  
د. منير مخلوف

انتهت الأسئلة  
مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

محضر في 2013/2/10

مركز العلوم للدراسات



04

السؤال الأول: أجب عن ثلاثة فقط مما أسفله التالية:

(أ) ادرب تقارب أو تباعد السلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} (2n+1)$$

(ب) ادرب تقارب المطلق أو التباعد للسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)^2$

(ج) ادرب تقارب أو تباعد الجداء الأسّي التالي، وأجب حقيقة في حال التقارب

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}\right)$$

(د) ادرب تقارب السلسلة العددية التالية  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{n(n+1)}$

الحل: (أ) لتباعد اختبار راب

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[ \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right]$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n)!! (2n+1)}{(2n-1)!!} \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!! (2n+3)} =$$

$$= \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 10n + 6}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 10n + 6} - 1 = \frac{4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 10n - 6}{4n^2 + 10n + 6} =$$

$$= \frac{-6n - 5}{4n^2 + 10n + 6}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[ \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-6n^2 - 5n}{4n^2 + 10n + 6} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} < 1$$

السلسلة تباعد، راب

نلاحظ أن المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^2}{n}$  —————

نلاحظ أن المتسلسلة  $\{a_n\} = \left\{ \frac{(\ln n)^2}{n} \right\}$  متناهية صاعدة وأن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^2}{n}$$

ندرس نهاية السلسلة  $\frac{(\ln x)^2}{x}$  عند  $x \rightarrow +\infty$  ومنه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

حسب اختبار لوبيتال المتناهي متقاربة

لذلك السلسلة المطلقة متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n}$$

حسب اختبار المقارنة لدينا

$$\ln n > 1 \quad n \geq 3$$

$$(\ln n)^2 > 1 \Rightarrow \frac{(\ln n)^2}{n} > \frac{1}{n}$$

بما أن السلسلة  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$  متناهية متباعدة حسب اختبار المقارنة

تكون السلسلة  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n}$  متباعدة وبالتالي السلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n}$  متباعدة.

أما بخصوص الاختبار الكاف فإن المتسلسلة  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\ln k)^2}{k}$  المتكاثرة

$$t_n = \int_1^n \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

متباعدتين معاً. هما عبارة عن متسلسلتين إيجابيتين متباعدتين معاً أو



١٧١  
دراسة تقارب المتتالية  $\{t_n\}$  حيث نتبع

$$t_n = \int_1^n \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[ \frac{(\ln x)^3}{3} \right]_1^n = \frac{(\ln n)^3}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^3}{3} = +\infty$$

المتتالية  $\{t_n\}$  متباعدة وبالتالي المتتالية  $\{S_n\}$  حيث  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\ln k)^2}{k}$  متباعدة وألحد  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n}$  متباعدة.

ومن ثم فإن السلسلة لا تكون متقاربة شرطياً.

(2) لندرس تقارب الجداء  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$  وتقاربه يكافئ دراسة تقارب

السلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  حيث يختار نهاية السلسلة هو السلسلة  $\sum \frac{1}{n}$  نجد أن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

المتتالية في طبيعة واحدة وبما أن السلسلة  $\sum \frac{1}{n}$  متباعدة فإن السلسلة  $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$  متباعدة وبالتالي الجداء العظمى متباعدة وليس له معنى.

في الموضوع بحد التقارب للسلسلة النوع

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

لنبتز لامتناهية هذا بعد ذلك نضبط اختيار داليل

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{x^{n+1}} \right| = |x|$$

[١٤]

وبما اني فضل من التقارب اذ  $|x| < 1$  وبما اني محال التقارب

هو  $-1 < x < 1$  ومعرفة  $x \in ]-1, +1[$

لذا التقارب عند الاطراف

$$x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

حسب الاختبار لاختبار النسبة مع السلسلة  $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1$$

السلسلة لاطبيبة واحدة كما تقارب  $\sum \frac{1}{n^2}$  ينتج تقارب  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

بما ان السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

متقاربة وبما اني نطاق التقارب  $[-1, 1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

طريقة ثانية

حسب العدد  $L$

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

$$\rho = \frac{1}{L} = 1$$

فقط التقارب  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  حيث  $x_0 = 0$   
 $\rho = 1$



3-1,1

والدراسة عند الاطراف ذاتها.

07

السؤال الثاني (٢) يمكن متتابعة الدوال  $\{f_n(x)\}$  المتعينة على المجال  $X=[0,1]$  عتاييه:

$$f_n(x) = x^n(1-x)^n \quad n \in \mathbb{N}$$

والطوبى! أريد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  في بين فيما إذا كان هذا التقارب منتظمًا

لهذه المتتالية على المجموعة  $X$  مع الإثبات في التوحيد التام.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n(1-x)^n dx$$

(٤) أدرس التقارب النقطي لمجموعة الدوال التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^3x^2} \quad x \in [0, +\infty[$$

الحل: (٢) لتوحيد التوحيد النقطي:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n(1-x)^n = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

التقارب النقطي يتم طارئة العزلة:  $f(x) = 0$

كيب إختيار فاير شتراس

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |x^n(1-x)^n| = \\ &= \sup_{0 \leq x \leq 1} (x^n(1-x)^n) \end{aligned}$$

لنفرض  $g(x) = x^n(1-x)^n$  ولنبين

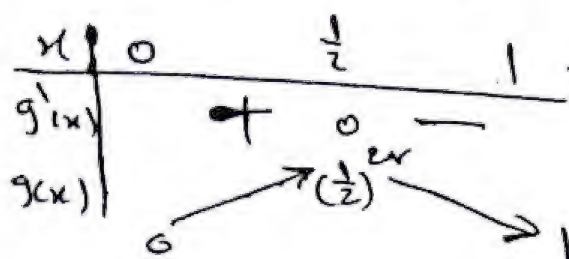
$$g'(x) = nx^{n-1}(1-x)^n - nx^n(1-x)^{n-1}$$

١٦

$$g'(x) = n x^{n-1} (1-x)^{n-1} [1-x-x]$$

أو  $g'(x) = n x^{n-1} (1-x)^{n-1} (1-2x)$

يجب  $g'(x) = 0$  نحصل على  $x=0$  ،  $x=1$  ، و  $x=\frac{1}{2}$  ، وحيث التقارب



$\Rightarrow \alpha_n = \sup_{0 \leq x \leq 1} (x^n (1-x)^n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$

التقارب منتظم

٢) كما أن التقارب منتظم لتتبعه الدوال المعطاة ثبات

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n (1-x)^n dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n (1-x)^n dx =$$

$$= \int_0^1 0 dx = [c]_0^1 = c - c = 0$$

يمكن حلها بشكل آخر

$$\int_0^1 x^n (1-x)^n dx = \int_0^1 x^{n+1-1} (1-x)^{n+1-1} dx =$$

$$= \beta(n+1, n+1) = \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} =$$



$$= \frac{(n!) \cdot (n!)}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2) \cdots (2n-(n-1))} \\ \text{AA} \\ = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2) \cdots (n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{n}{2n} \cdot \frac{n-1}{2n-1} \cdot \frac{n-2}{2n-2} \cdots \frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} <$$

$$< \frac{1}{2n+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{\text{مر } n} = \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n (1-x)^n dx < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

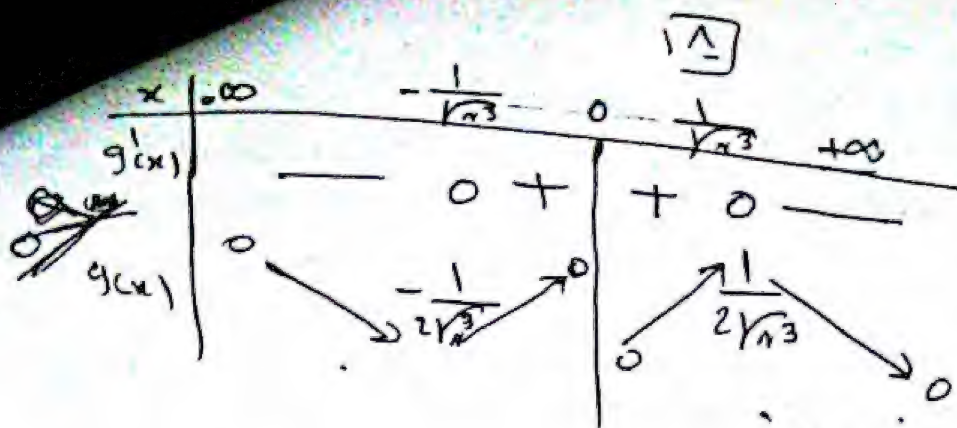
(\*) لسر التدرج المتناهي للحد  $x \in [0, +\infty[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^3 x^2}$

كيفية اختيار فايرشتراس للتقارب المتناهي للحد النسبي

نقوم بتقدير المقدار الذي :  $\left| \frac{x}{1+n^3 x^2} \right|$  لنفرض  $g(x) = \frac{x}{1+n^3 x^2}$  نحصل على

$$g'(x) = \frac{1+n^3 x^2 - 2n^3 x^2}{(1+n^3 x^2)^2} = \frac{1-n^3 x^2}{(1+n^3 x^2)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{n^3} \Rightarrow x = + \frac{1}{\sqrt{n^3}} \\ x = - \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$



$$\Rightarrow \forall x \in [0, +\infty[ \Rightarrow \left| \frac{x}{1+n^3 x^2} \right| < \frac{1}{2\sqrt{n^3}}$$

السلسلة  $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \sum \frac{1}{2\sqrt{n^3}}$  متسلسلة

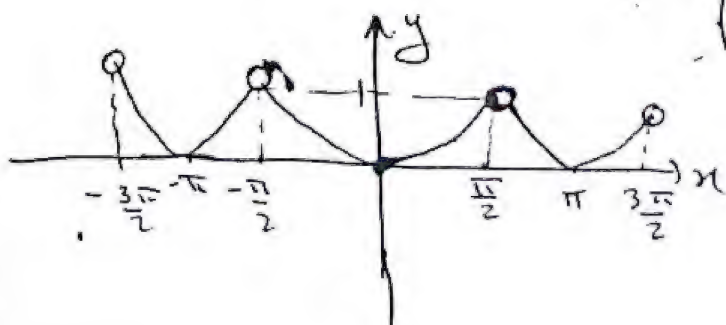
متسلسلة  $s = \frac{3}{2} > 1$  متقاربة حسب اختبار مبرير  
للسلسلة التفاضلية تكون السلسلة التفاضلية المتقاربة  
بارنتظام.

السؤال الثالث: أوجد متطور فورييه للسلسلة  $f(x) = |\sin x|$

معاملات  $\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$   
(أ) باستخدام التكاملات الدورية أصعب طريقة التكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi$$

$$f(x) = |\sin x| = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\sin x & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \end{cases}$$





[19]

سلسلة فورييه لدالة زوجية

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{لأن الدالة زوجية} \quad T = \frac{\pi}{2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{4}{\pi} [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi} [0 - 1] = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos \frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos(2nx) dx$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)x) + \frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{1}{2n+1} \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2n-1} \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right]$$

$$\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(n\pi) = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(n\pi) = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right] = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2n-1 - 2n-1}{4n^2-1} \right] =$$

$$= -\frac{4}{\pi(4n^2-1)} = \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \quad n = 1, 2, \dots$$

11

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{T}$$

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nx)$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi$$

$$t = \sin^2 \varphi$$

$$dt = 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$\varphi = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$I = \int_0^1 t^3 (1-t)^2 \cdot \frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{5}{2}} (1-t)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{7}{2}) \Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{5}{2}) \Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(6)}$$

$$\Gamma(6) = 5! = 120$$

$$\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{5}{2} \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{15}{8} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2} \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{15\sqrt{\pi}}{8} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4}}{120} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\pi}{(4)(8)(24)} = \frac{9\pi}{(32)(48)} = \frac{3\pi}{512}$$



نلاحظ ان تقارب الجذرات التالية مع ص ب يتقارب ان الجذر

$$1) \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^{2n-1}) \quad ; |x| < 1$$

الحل: نأخذ متالية الجذرات الجزئية منه حيث

$$P_{2n-1}(x) = \prod_{k=1}^n (1+x^{2k-1}) = (1+x)(1+x^3)(1+x^5) \dots (1+x^{2n-1})$$

$$P_{2n}(x) = \prod_{k=1}^n (1+x^{2k}) = (1+x^2)(1+x^4)(1+x^6) \dots (1+x^{2n})$$

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n (1+x^k) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) \dots (1+x^n)$$

ونلاحظ ان

$$P_n(x) = P_{2n-1}(x) \cdot P_{2n}(x)$$

ما جبة افترض

$$P_{2n}(x) = (1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)(1+x^8) \dots (1+x^{2n}) =$$

$$= (1+(x^2)^1)(1+(x^2)^2)(1+(x^2)^3) \dots (1+(x^2)^n) =$$

$$= P_n(x^2) \Rightarrow P_{2n}(x) = P_n(x^2)$$

$$(1-x)P_n(x) = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots (1+x^n) =$$

$$(1-x^2)P_n(x) = (1+x)(1+x^3) \dots (1+x^{2n-1})(1-x^{2n-2}) = P_{2n-1}(x)(1-x^{2n-2})$$

$$\Rightarrow (1-x^2)P_n(x) = P_{2n-1}(x)(1-x^{2n-2})$$

$$\Rightarrow (1-x^2)P_{2n-1}(x) \cdot P_{2n}(x) = P_{2n-1}(x)(1-x^{2n-2})$$

$$\Rightarrow P_{2n}(x) = \frac{1-x^{2n-2}}{1-x^2}$$

مزاوية أخرى

$$P_n(x^2) = P_{2n}(x) = \frac{1-x^{2n-2}}{1-x^2} = \frac{1-(x^2)^{n-1}}{1-(x^2)^1}$$

$$\Rightarrow P_n(x) = \frac{1-x^{n-1}}{1-x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{2n-1}(x) &= \frac{P_n(x)}{P_{2n}(x)} = \frac{\frac{1-x^{n-1}}{1-x}}{\frac{1-x^{2n-2}}{1-x^2}} = \frac{(1-x^{n-1})(1+x)}{(1+x)(1-(x^{n-1})^2)} \\ &= \frac{(1-x^{n-1})(1+x)}{(1-x^{n-1})(1+x^{n-1})} = \frac{1+x}{1+x^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_{2n-1}(x) = \frac{1+x}{1+x^{n-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{2n-1}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{1+x^{n-1}} = 1+x \quad ; |x| < 1$$

$$\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^{2n-1}) = 1+x$$

$$2) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}\right)$$

لنرى تقارب السلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$  حسب اختبار المقارنة

$$\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{حيث} \quad \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

السلسلة  $\sum \frac{1}{n^2}$  متقاربة وجب اختبار المقارنة بهذا السلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$  متقاربة وبالتالي الجواب متقارب



نظام متكررة الجدارات الجزئية البرصها الواسع

$$P_n = \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n+1} \left(\frac{k - \sin \frac{1}{k}}{k}\right)$$

$$P_1 = 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}$$

$$P_2 = \left(1 - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3} \sin \frac{1}{3}\right)$$

⋮

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3} \sin \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1} \sin \frac{1}{n+1}\right)$$

$$P_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3} \sin \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1} \sin \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{n+2} \sin \frac{1}{n+2}\right)$$

$$P_{n+1} - P_n = \left(1 - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3} \sin \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1} \sin \frac{1}{n+1}\right) \left(-\frac{\sin \frac{1}{n+2}}{n+2}\right)$$

$$P_{n+1} - P_n < 0 \Rightarrow P_{n+1} < P_n$$

متناهية وناقص

ولذلك

$$\frac{1}{k} \sin \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow -\frac{1}{k} \sin \frac{1}{k} \geq -\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k} \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \leq \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}\right)$$

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} =$$

$$= \prod_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots$$

$$= \frac{n+1}{2n}$$

$$\frac{n+1}{2n} \leq \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}\right)$$

١٥

وبما أن المتسلسلة  $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}\right)$  متسلسلة متسلسلة تماماً فهي متقاربة

طالعها الاذن في

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}\right) = (1 - \sin 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 - \sin 1}{2}$$

انتهى

بإذن

مركز العلوم للخدمات الجامعية

محاضرات - مخبريات - قرطاسية

٠٩٦٦٣٢٨٧٥٧ - ٠٩٢١٨٧٩٧٩٧



أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (35 درجة) : (أ) أدرس تقارب أو تباعد السلاسل التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} \right) \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

(ب) أدرس تقارب أو تباعد الجداءات اللانهائية التالية وأحسب قيمته في حال التقارب :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2n-1}) \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

السؤال الثاني (35 درجة) (أ) لتكن متتالية الدوال  $f_n(x)$  المعرفة كمايلي :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad , \quad x \in [0,1] \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

المطلوب: (1) أوجد  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ثم بين فيما إذا كان هذا التقارب منتظم أم لامع الإثبات .(2) بين صحة المساواة التالية :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx$  مع الإثبات .(ب) أدرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال :  $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 \left( \frac{1}{1+x^2} \right)^{n-1}$  على  $R$ .السؤال الثالث (30 درجة) : (أ) أوجد منشور فورييه للدالة  $f(x) = |\sin x|$  على المجال  $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$  .(ب) : أثبت أن :  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad , \quad \forall x > 0$